

Lernzettel Mathe

Inhaltsverzeichnis

<u>Aufgabe 1 - Vollständige Induktion</u>	<u>2</u>
<u>Aufgabe 2 - Grenzwertbestimmung</u>	<u>2</u>
<u>Aufgabe 3 - Lin/Log</u>	<u>2</u>
<u>Aufgabe 4 - Barwert/Endwert</u>	<u>3</u>
<u>Aufgabe 5 - Maximalstellen, steigend/fallend</u>	<u>3</u>
<u>Aufgabe 6 - Monotonie, Konvex/Konkav</u>	<u>3</u>
<u>Aufgabe 7 - Hessematrix</u>	<u>4</u>
<u>Aufgabe 8 - Konsumenten/Produzentenrente, Integrale</u>	<u>4</u>
<u>Aufgabe 9 - Gauß-Elimination</u>	<u>5</u>
<u>Aufgabe 10 - Matrixoperationen</u>	<u>5</u>
<u>Aufgabe 11 - Determinanten/Laplace</u>	<u>6</u>
<u>Aufgabe 12 - Lagrange</u>	<u>6</u>

Aufgabe 1 - Vollständige Induktion

Formelsammlung Seite 17

- 1) Beweis für $n=0$ (in Ausnahmefällen $n=1$)
 - 1.1) Bei Matrixinduktion: Muss Einheitsmatrix I ergeben
- 2) Aussage gilt für $n=0$?
- 3) $n \rightarrow n+1$ definieren
- 4) Induktionsvermutung aufstellen (f^n wie oben angegeben)
- 5) zz: f^{n+1}
- 7) Beweisführung
 - 7.1) Ableitungsinduktion (Beweis üblicherweise durch Ableitung von f^n)
 - 7.2) Matrixinduktion (Beweis durch $A^n \cdot A$)

Aufgabe 2 - Grenzwertbestimmung

Formelsammlung Seite 34

- 1) Erster Grenzwert: Auf einen Bruchstrich bringen, lim errechnen
- 2) Zweiter: e-Funktion korrekt ausklammern, lim für Plus UND Minus Unendlich errechnen
- 3) Dritter: Anwendung L'Hospital-Regel: Wenn Nenner Null, dann Zähler und Nenner separat ableiten und damit Grenzwerte bestimmen

Dominanz von Funktionen: $a < \ln(x) < x^a < e^x$

Aufgabe 3 - Lin/Log

- 1) Zusammenhänge herausfinden (Änderungsrate berechnen!):

Lin/Lin: Stück1/Stück2 - Linearfunktion $a \cdot x$ - Rate: Änderung Stück2/Stück1

Log/Lin: Prozent/Stück - Logarithmus $a \cdot \ln$ - Rate: 'Änderung Stück/Proz (in 0.00-Form!)

Lin/Log: Stück/Prozent - e-Funktion e^a - Rate: Änderung Proz/Stück (in 0.00-Form!)

Log/Log: Prozent1/Prozent2 - Exponentialfunktion a^x - Rate: Änderung Proz2/Proz1

- 2) Konstanten erläutern: Für Linearzusammenhang erkennen, 0101-Schema anwenden!

Aufgabe 4 - Barwert/Endwert

Formelsammlung Seite 32

- 1) Berechnung Barwert/Endwert, Monate/Jahre beachten,
- 2) Cashflow berechnen: Umstellen nach c
- 3) Zeitdauer ausrechnen, ZUERST nach $(1+r)^n$, Hinweise auf ln's beachten für korrekte Zahlen!

Aufgabe 5 - Maximalstellen, steigend/fallend

Formelsammlung Seite 37

- 1) $D(p)$ nach p umstellen
- 2) Erlösfunktion durch $p \cdot x$
- 3) Gewinnfunktion aufstellen (E-K), zweimal ableiten

- 4) Als notwendige Bedingung: G' nullsetzen (wenn PQ-Formel: Seite 15, wenn Wurzel(x) -> stehen lassen und damit rechnen) und stationäre Stellen(n) ermitteln
- 5) Hinreichende Bedingung: x in G'' einsetzen, Ergebnis kleiner Null als Bedingung für Maximalstelle
- 6) Gleichgewichtspreis unter Verwendung x errechnen

- 7) Steigende/fallende GK: Kostenfunktion zweimal ableiten, wenn:
 - K'' größer Null -> steigende GK
 - K'' kleiner Null -> fallende GK

Aufgabe 6 - Monotonie, Konvex/Konkav

Seite 37

- 1) Ableitungen beweisen
- 2) Erste Ableitung größer/gleich Null setzen für monoton wachsend (Ungleichung! Bei Addition/Subtraktion Ungleichheitszeichen umdrehen)
- 3) Ableitung im Wendepunkt ("Grenze" der Intervalle zwischen Monoton steigend/fallend) machen und damit bestimmen, ob Minimum oder Maximum
- 4) Zweite Ableitung, gegebenenfalls Bereiche bestimmen (+/- unendlich)
 - Größer/gleich Null -> konvex
 - Kleiner/gleich Null -> konkav

Aufgabe 7 - Hessematrix

Seite 66

- 1) Hessematrix beweisen: Erste partielle Ableitungen nach x und y (d.h. y und x bleiben ggf. stehen)
- 2) Zweite partielle Ableitungen laut Formelsammlung
- 3) Evtl. Ausklammern

- 4) z.B.
 - Vektormultiplikation zur Hessematrix
 - Determinante der Hessematrix (Formelsammlung Seite 60)

- 5) C-Teil streichen!

Aufgabe 8 - Konsumenten/Produzentenrente, Integrale

Konsumenten/Produzentenrent, Seite 45

- 1) Gleichgewichte ausrechnen durch Gleichsetzen
- 2) Umkehrfunktionen durch umstellen nach p
- 3) Formeln für CS/PS aus Formelsammlung Seite 45

Integrale, Seite 43-44

- 1) Beweis per Hauptsatz: Rechte Seite des Integrals ableiten
- 2) Mit gegebenen $u/u'/v/v'$ die fehlenden davon bestimmen
- 3) In Formel aus Seite 43 einsetzen und die gegebene Funktion beweisen
- 4) Bestimmte Integrale bestimmen: Obere Grenze minus untere Grenze, bei e-Funktionen und Unendlichen Grenzen -> mit Grenzwerten arbeiten

Aufgabe 9 - Gauß-Elimination

Seite 51-52

- 1) Lösung LGS $Ax=b$: b an A anfügen, Zeilenoperationen bis untere Dreiecksform entsteht (hier: 3x Nullen in Diagonale)
- 2) Determinante: Diagonale über Nullen multiplizieren, Vorzeichen anhand der Zeilentäusche setzen (ungerade Anzahl: Minus, gerade Anzahl: Plus)
- 3) Rang der Matrix: Zeilenzahlen bevor Nullzeile
- 4) Rücksubstitution (!!!): x_1 bis x_4 ausrechnen, meist mit letzter Zeile beginnen (z.B. $x_4=0$ oder eindeutig)

- 5) Inverse $A^{-1} = X$ beweisen: $X \cdot A$ muss Einheitsmatrix I ergeben
- 6) Lösung LGS per Inverse: $A^{-1} \cdot b$ muss gleiches Ergebnis wie in (4) für $x_1..x_4$ ergeben

- 7) Spezialfall evtl.: Determinante durch Umstellung Transformierte, Inversion durch Gaußelimination von oberer auf untere Dreiecksform

Aufgabe 10 - Matrixoperationen

Matrixoperationen:

- *Input/Outputmatrix: Gesamtbedarf, Direktbedarf, Leontief Inverse, Seite 58*
- *Matrixmultiplikation, Inversenbestimmung, Produkte Matrixtransponierung*
- *Vektorenmultiplikation*

Aufgabe 11 - Determinanten/Laplace

Seite 60-61

- 1) Determinante durch Laplaceentwicklung bestimmen: Zeile oder Spalte mit meisten Nullstellen wählen, nach Möglichkeit letzte Zeile (da dann dritte Unterdeterminante für c) schon feststeht), Vorzeichen nach Schachbrettmuster Seite 61 setzen
- 2) Singularität: Determinante Nullsetzen, ggf. ausklammern, alle x bestimmen für die $\det(A)$ Null wird
- 3) Positiv Definit: Alle vier Unterdeterminanten müssen größer null sein.
 - d_1 = Zahl links oben
 - d_2 = Berechnung laut Seite 60: 2×2 Matrix
 - d_3 = Berechnung laut Seite 60; Besser: Wenn bei a) nach 4te Zeile entwickelt, liegt d_3 schon vor (letzte Teildeterminante aus Laplace)!
 - d_4 = Laut Laplace-Entwicklung in a)

Alle vier Unterdeterminanten größer Null setzen und nach x umstellen. Ergebnisse nach Größe reihen und schreiben: "A ist pos. definit, wenn x größer als größtes Ergebnis".

Aufgabe 12 - Lagrange

Seite 70

- 1) Aufstellen Lagrangefunktion, Nebenbedingung mit "Plus Delta" verknüpfen (zuvor Nullsetzen)
- 2) Partielle Ableitungen nach: Delta, x, y, z
- 3)
 - Entweder (wenn Hinweis auf vorheriges Gleichungssystem gegeben):
Hessematrix aufstellen
Notwendige Bedingung: Bei $\text{grad}L=0$ ist die Lösung für $x_1 \dots x_4$ (aus vorheriger Aufgabe) gleich der stationären Stelle hier.
Dann als hinreichende Bedingung: Unterdeterminanten bestimmen: Definitheit gemäß Tabelle Formelsammlung Seite 62
 - Oder (wenn kein Hinweis bzw. Lagrange mit nur 2 Variablen):
Notwendige Bedingung: Die Ableitungen L'_x und L'_y nach Delta umstellen und auflösen, durch Einsetzen alle Variablen errechnen, Stationäre Stelle aufschreiben
Hinreichende Bedingung: Hessematrix aufstellen, Unterdeterminanten (und nur die! Also bei 4×4 -Matrix nur die 1×1 , 2×2 , 3×3 etc.) überprüfen.
Sind alle kleiner Null -> Minimalstelle
Sind alle größer Null -> Maximalstelle